МАТЕМАТИКА

УДК 517.95

ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ВТОРОГО РОДА

Я.Т. Мегралиев, Н.А. Гейдарзаде

Бакинский государственный университет

ON AN INVERSE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE SECOND-ORDER ELLIPTIC EQUATION WITH INTEGRAL CONDITION OF THE SECOND KIND

Y.T. Mehraliev, N.A. Heydarzade

Baku State University

Исследована одна обратная нелокальная краевая задача для эллиптического уравнения второго порядка. Суть задачи состоит в том, что требуется вместе с решением определить неизвестный коэффициент. Задача рассматривается в прямоугольной области. При решении исходной обратной краевой задачи осуществляется переход от исходной обратной задачи к некоторой вспомогательной обратной задаче. С помощью принципа сжатых отображений доказываются существование и единственность решения вспомогательной задачи. Также доказываются существование и единственность классического решения исходной задачи.

Ключевые слова: *обратная краевая задача*, *эллиптическое уравнение*, *метод Фурье*, *классическое решение*.

An inverse problem for the elliptic equation of the second order with periodical boundary conditions is investigated. The definition of a classical solution of the problem is introduced. The essence of the problem is that together with the solution it is required to determine the unknown coefficient. The problem is considered in a rectangular domain. To investigate the solvability of the inverse problem, the conversion from the original problem to the some direct auxiliary problem with trivial boundary conditions is realized. Using the principle of condensed mappings, the existence and uniqueness of the solution of the auxiliary problem are proved. The existence and uniqueness of the classical solution of the original problem are also proved.

Keywords: *inverse boundary value problem*, *elliptic equation*, *Fourier method*, *classical solution*.

Введение

Известно, что [1] при математическом моделировании различных процессов физики, химии, экологии, биологии часто возникают задачи, когда вместо классических краевых условий задана определенная связь значений искомой функции на границе области и внутри нее. Задачи такого типа называют нелокальными задачами. Исследование таких задач вызвано не только теоретическими интересами, но и практической необходимостью. Впервые систематическое исследование нелокальных начально-краевых задач было проведено в [2]. В частности, были поставлены и исследованы пространственно нелокальные задачи для определенного класса эллиптических уравнений. Впоследствии в [3], [4] задача, сформулированная в [2], была названа задачей Бицадзе – Самарского, и были предложены методы решения задач указанного типа для общих эллиптических уравнений. И наконец, краевые задачи с нелокальными условиями возникают при исследовании некоторых обратных задач.

Обратные краевые задачи для эллиптического уравнения второго порядка исследовались в работах [5]–[10].

В [7] рассмотрена обратная краевая задача для эллиптического уравнения второго порядка с локальными краевыми условиями, а в работе [8] в отличие от этой задачи, исследована обратная краевая задача при наличии дополнительного интегрального условия первого рода. Далее, в [9] рассмотрена обратная краевая задача при наличии интегрального условия первого рода, которая сводится к самосопряженной задаче. А в работе [10] исследуется обратная краевая задача при наличии интегрального условия первого рода, которая сводится к несамосопряженной задаче.

Целью данной работы является доказательство существования и единственности решения обратной краевой задачи для эллиптического уравнения второго порядка с интегральным краевым условием второго рода.

1 Постановка задачи и ее сведение к эквивалентной задаче

Для уравнения

$$u_{tt}(x,t)+u_{xx}(x,t)=a(t)u(x,t)+f(x,t) \quad (1.1)$$

в области $D_T=\{(x,t):0\le x\le 1,\,0\le t\le T\}$ рассмотрим обратную краевую задачу с граничными условиями

$$u(x,0)=\varphi(x),\, u_t(x,T)=\psi(x)\ (0\le x\le 1), \quad (1.2)$$

$$u_x(0,t)=0\ (0\le t\le T), \quad (1.3)$$

интегральным условием второго рода

$$bu(1,t)+\int_0^1 u(x,t)dx=0\ (0\le t\le T) \quad (1.4)$$

и с дополнительным условием

$$u(0,t) = h(t)\ (0 \le t \le T), \qquad (1.5)$$

где $b > 0$ – заданное число, $f(x,t)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $h(t)$ – заданные функции, а $u(x,t)$ и $a(t)$ – искомые функции.

Определение. *Классическим решением обратной краевой задачи* (1.1)–(1.5) назовем пару $\{u(x,t), a(t)\}$ функций $u(x,t) \in C^2(D_T)$ и $a(t) \in C[0,T]$, удовлетворяющих уравнению (1.1) в D_T, условиям (1.2) в $[0,1]$, и условиям (1.3)–(1.5) в $[0,T]$ в обычном смысле.

Наряду с обратной краевой задачей (1.1)–(1.5) рассмотрим следующую вспомогательную обратную краевую задачу. Требуется определить пару $\{u(x,t), a(t)\}$ функций $u(x,t) \in C^2(D_T)$ и $a(t) \in C[0,T]$ из соотношений(1.1)–(1.4),

$$h''(t) + u_{xx}(0,t) = a(t)h(t) + f(0,t) \quad (0 \le t \le T). \qquad (1.6)$$

Аналогично [9] можно доказать следующую лемму.

***Лемма* 1.1.** Пусть $\varphi(x), \psi(x) \in C[0,1]$,

$$f(x,t) \in C(D_T),\ h(t) \in C^2[0,T],\ h(t) \ne 0$$

при $t \in [0,T]$, и выполняются условия согласования

$$\varphi(0) = h(0),\ \psi(0) = h'(T).$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

1. Каждое классическое решение $\{u(x,t), a(t)\}$ задачи (1.1)–(1.5) является и решением задачи (1.1)–(1.4), (1.6).

2. Каждое решение $\{u(x,t), a(t)\}$ задачи (1.1)–(1.4), (1.6) такое, что

$$\frac{1}{2}T^2\|a(t)\|_{C[0,T]} < 1$$

является классическим решением (1.1)–(1.5).

2 Сведения из теории спектральных задач и введение некоторых пространств

Задача на собственные значения [11]

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0\ (0 \le x \le 1), \qquad (2.1)$$

$$y'(0) = 0,\ y'(1) = b\lambda y(1)\ (b > 0), \qquad (2.2)$$

имеет только собственные функции

$$y_k(x) = \sqrt{2}\cos(\sqrt{\lambda_k}x),\ k = 0,1,...,$$

с неотрицательными собственными числами λ_k из уравнения $tg\sqrt{\lambda} = -b\sqrt{\lambda}$.

Решая однородную задачу, соответствующую задаче (1.1)–(1.4) методом разделения переменных, приходим к спектральной задаче для уравнения (2.1) с граничными условиями

$$y'(0) = 0,\ by(1) + \int_0^1 y(x)dx = 0\ (b > 0). \qquad (2.3)$$

Ее решением будет система $\{y_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, т. е. система собственных функций задачи (2.1), (2.2) без функций, соответствующий собственному значению $\lambda_0 = 0$.

Известно [11], что начиная с некоторого номера N имеют место оценки

$$\left|\sqrt{\lambda_k} - \pi/2 - (k-1)\pi\right| < \frac{1}{(b\pi k)}. \qquad (2.4)$$

Сравним систему $\{y_k(x)\}$ без функции $y_0(x)$ с известной системой $\{v_k(x)\}$, $v_k(x) = \sqrt{2}\cos\sqrt{\mu_k}x$, где $\sqrt{\mu_k} = \frac{\pi}{2} + \pi(k-1),\ k = 1,2,...,$ которая является ортонормированным базисом в $L_2(0,1)$. Аналогично [12], для $k \ge N$, с учетом (2.4) можно показать, что

$$\|y_k(x) - v_k(x)\|_{L_2(0,1)}^2 < \frac{2}{3(bk\pi)}.$$

Таким образом,

$$\sum_{k=N}^{\infty}\|y_k(x) - v_k(x)\|_{L_2(0,1)}^2 < \frac{1}{9b^2}, \qquad (2.5)$$

откуда следует сходимость ряда из левой части этого неравенства.

Имеет место следующая

***Лемма* 2.1** [11]. *Биортогонально сопряженная система* $\{z_k(x)\}, k = 1,2,...,$ *определяется формулой*

$$z_k(x) = \frac{\sqrt{2}\cos\left(\sqrt{\lambda_k}x\right) - \cos\left(\sqrt{\lambda_k}\right)}{1 + b\cos^2\left(\sqrt{\lambda_k}\right)}. \qquad (2.6)$$

***Теорема* 2.2** [11]. *Система* $\{y_k(x)\}, k = 1,2,...,$ *образует базис Рисса в пространстве* $L_2(0,1)$.

Теперь, пусть

$$\eta_k(x) = \sqrt{2}\sin\left(\sqrt{\lambda_k}x\right),$$

$$\xi_k(x) = \sqrt{2}\sin\left(\sqrt{\mu_k}x\right),\ k = 1,2,....$$

Тогда, аналогично (2.5), имеем:

$$\sum_{k=N}^{\infty}\left\|\eta_k(x) - \xi_k(x)\right\|_{L_2(0,1)}^2 < \frac{1}{9b^2}. \qquad (2.7)$$

Предположим, что $g(x) \in L_2(0,1)$. Тогда, соответственно с учетом (2.5), (2.7), получаем:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_0^1 g(x)y_k(x)dx\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \le M\|g(x)\|_{L_2(0,1)}, \qquad (2.8)$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_0^1 g(x)\eta_k(x)dx\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \le M\|g(x)\|_{L_2(0,1)}, \qquad (2.9)$$

где

$$M = \left(N(1+N) + 2 + \frac{1}{9b^2}\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (2.10)$$

Пусть $g(x) \in W_2^1(0,1)$ и

$$J(g) = bg(1) + \int_0^1 g(x)dx = 0.$$

Тогда имеем:

$$g_k = \left(g(x), z_k(x)\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\alpha_k}\int_0^1 g(x)\left(\cos\left(\sqrt{\lambda_k}x\right) - \cos\left(\sqrt{\lambda_k}\right)\right)dx =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{\alpha_k}\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\int_0^1 g'(x)\sin\left(\sqrt{\lambda_k}x\right)dx, \quad (2.11)$$

где $\alpha_k = 1 + b\cos^2\left(\sqrt{\lambda_k}\right) > 1$.

Отсюда, в силу (2.9), находим:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sqrt{\lambda_k}\left|g_k\right|\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \le M\left\|g'(x)\right\|_{L_2(0,1)}. \quad (2.12)$$

Предположим, что

$$g(x) \in W_2^2(0,1),\ J(g) = 0,\ g'(0) = 0.$$

Тогда из (2.11) получаем:

$$g_k = \frac{\sqrt{2}}{\alpha_k}\frac{1}{\lambda_k}\times$$
$$\times\left(g'(1)\cos\left(\sqrt{\lambda_k}\right) - \int_0^1 g''(x)\cos\left(\sqrt{\lambda_k}x\right)dx\right). \quad (2.13)$$

В силу (2.8), из (2.13) находим:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k\left|g_k\right|\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \le$$
$$\le 2m_0\left|g'(1)\right| + \sqrt{2}M\left\|g''(x)\right\|_{L_2(0,1)}, \quad (2.14)$$

где

$$m_0 = \frac{1}{b}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Теперь, пусть $g(x) \in W_2^3(0,1)$,

$$J(g) = 0,\ g'(0) = 0,\ g'(1) + bg''(1) = 0.$$

Тогда из (2.13) имеем:

$$g_k = \frac{\sqrt{2}}{\alpha_k}\frac{1}{\lambda_k}\int_0^1 g'''(x)\sin\left(\sqrt{\lambda_k}x\right)dx. \quad (2.15)$$

Отсюда, с учетом (2.9), находим:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k\sqrt{\lambda_k}\left|g_k\right|\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \le M\left\|g'''(x)\right\|_{L_2(0,1)}. \quad (2.16)$$

Теперь, с целью исследования задачи (1.1)–(1.4), (1.6) рассмотрим следующие пространства:

1. Обозначим через $B_{2,T}^{\frac{3}{2}}$ совокупность всех функций $u(x,t)$ вида

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)y_k(x),$$

рассматриваемых в D_T, где каждая из функций $u_k(t)$ непрерывна на $[0,T]$ и

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k\sqrt{\lambda_k}\left\|u_k(t)\right\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

Норму в этом множестве определим так:

$$\left\|u(x,t)\right\|_{B_{2,T}^{\frac{3}{2}}} = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k\sqrt{\lambda_k}\left\|u_k(t)\right\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Аналогично [9] доказывается,что $B_{2,T}^{\frac{3}{2}}$ является банаховым пространством.

2. Через $E_T^{\frac{3}{2}}$ обозначим пространство, состоящее из топологического произведения

$$B_{2,T}^{\frac{3}{2}} \times C[0,T].$$

Норма элемента $z = \{u, a\}$ определяется формулой

$$\left\|z\right\|_{E_T^{\frac{3}{2}}} = \left\|u(x,t)\right\|_{B_{2,T}^{\frac{3}{2}}} + \left\|a(t)\right\|_{C[0,T]}.$$

Очевидно, что $E_T^{\frac{3}{2}}$ является банаховым пространством.

3 Исследование существования и единственности классического решения обратной краевой задачи

Первую компоненту $u(x,t)$ решения $\{u(x,t), a(t)\}$ задачи (1.1)–(1.4), (1.6) будем искать в виде:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)y_k(x), \quad (3.1)$$

где

$$u_k(t) = \int_0^1 u(x,t)z_k(x)dx \ \ (k = 1,2,...),$$

причем

$$y_k(x) = \sqrt{2}\cos\left(\sqrt{\lambda_k}x\right),$$

$$z_k(x) = \frac{\sqrt{2}\cos\left(\sqrt{\lambda_k}x\right) - \cos\left(\sqrt{\lambda_k}\right)}{1 + b\cos^2\left(\sqrt{\lambda_k}\right)}.$$

Применив метод разделения переменных для определения искомых функций $u_k(t)\ (k = 1,2,...)$, из (1.1) и (1.2) имеем:

$$u''_k(t) - \lambda_k u_k(t) = F_k(t;a,u)$$
$$(k = 1,2,...;\ 0 \le t \le T), \quad (3.2)$$

$$u_k(0) = \varphi_k,\ u'_k(T) = \psi_k\ \ (k = 1,2,...), \quad (3.3)$$

где

$$F_k(t;u,a) = f_k(t) + a(t)u_k(t),$$

$$f_k(t) = \int_0^1 f(x,t)z_k(x)dx,$$

$$\varphi_k = \int_0^1 \varphi(x)z_k(x)dx,$$

$$\psi_k = \int_0^1 \psi(x)z_k(x)dx\ (k = 1,2,...).$$

Решая задачу (3.2), (3.3) находим:

$$u_k(t) = \frac{ch(\sqrt{\lambda_k}(T-t))}{ch(\sqrt{\lambda_k}T)}\varphi_k +$$
$$+\frac{sh(\sqrt{\lambda_k}t)}{\sqrt{\lambda_k}ch(\sqrt{\lambda_k}T)}\psi_k + \quad (3.4)$$
$$+\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\int_0^T G_k(t,\tau)F_k(\tau;u,a)d\tau,$$

где

$$G_k(t,\tau)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2ch\left(\sqrt{\lambda_k}T\right)}\Big[sh\left(\sqrt{\lambda_k}\left(T+t-\tau\right)\right)-\\ -sh\left(\sqrt{\lambda_k}\left(T-\left(t-\tau\right)\right)\right)\Big],\ t\in[0,\tau];\\ -\dfrac{1}{2ch\left(\sqrt{\lambda_k}T\right)}\Big[sh\left(\sqrt{\lambda_k}\left(T-\left(t+\tau\right)\right)\right)-\\ -sh\left(\sqrt{\lambda_k}\left(T-\left(t-tau\right)\right)\right)\Big],\ t\in[0,\tau].\end{cases}$$

После подстановки (3.4) в (3.1), для определения компоненты $u(x,t)$ классического решения задачи (1.1)–(1.4), (1.6), получаем:

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{ch(\sqrt{\lambda_k}(T-t))}{ch(\sqrt{\lambda_k}T)}\varphi_k+\frac{sh(\sqrt{\lambda_k}t)}{\sqrt{\lambda_k}ch(\sqrt{\lambda_k}T)}\psi_k+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\int_0^T G_k(t,\tau)F_k(\tau;u,a)d\tau\right\}y_k(x). \quad (3.5)$$

Теперь из (1.6), с учетом (3.1), имеем:

$$a(t)=h^{-1}(t)\left\{h''(t)-f(0,t)-\sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k u_k(t)\right\}. \quad (3.6)$$

Для того, чтобы получить уравнение для второй компоненты $a(t)$ решения $\{u(x,t),a(t)\}$ задачи (1.1)–(1.4), (1.6) подставим выражение (3.4) в (3.6):

$$a(t)=h^{-1}(t)\left\{h''(t)-f(0,t)-\right.$$

$$-\sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\left(\frac{ch(\sqrt{\lambda_k}(T-t))}{ch(\sqrt{\lambda_k}T)}\varphi_k+\frac{sh(\sqrt{\lambda_k}t)}{\sqrt{\lambda_k}ch(\sqrt{\lambda_k}T)}\psi_k+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\int_0^T G_k(t,\tau)F_k(\tau;u,a)d\tau\right)\right\}. \quad (3.7)$$

Таким образом, решение задачи (1.1)–(1.4), (1.6) свелось к решению системы (3.5), (3.7) относительно неизвестных функций $u(x,t)$ и $a(t)$.

Для изучения вопроса единственности решения задачи (1.1)–(1.4), (1.6) важную роль играет следующая

***Лемма* 3.1.** Если $\{u(x,t),a(t)\}$ – любое решение задачи (1.1)–(1.4), (1.6), то функции

$$u_k(t)=\int_0^1 u(x,t)z_k(x)dx \ \ (k=1,2,...)$$

удовлетворяют на $[0,T]$ системе (3.4).

Доказательство. Пусть $\{u(x,t),a(t)\}$ – любое решение задачи (1.1)–(1.4), (1.6). Тогда очевидно, что

$$2\int_0^1 u_{tt}(x,t)z_k(x)dx=\frac{d^2}{dt^2}\left(2\int_o^1 u(x,t)dx\right)= \quad (3.8)$$

$$=u''_k(t) \ \ (k=1,2,...),$$

причем $u_k(t)\in C^2[0,T]$.

Далее, интегрируя по частям дважды , с учетом (1.3), (1.4), имеем:

$$\int_0^1 u_{xx}(x,t)z_k(x)dx=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{\alpha_k}\int_0^1 u_{xx}(x,t)\left(\cos\left(\sqrt{\lambda_k}x\right)-\cos\left(\sqrt{\lambda_k}\right)\right)dx=$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{\alpha_k}\left(b\lambda_k u(1,t)\cos\left(\sqrt{\lambda_k}\right)+\right.$$

$$\left.+\lambda_k\int_0^1 u_{xx}(x,t)\cos\left(\sqrt{\lambda_k}x\right)dx\right)=$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{\alpha_k}\left[\lambda_k\left(bu(1,t)+\int_0^1 u(x,t)dx\right)\cos\left(\sqrt{\lambda_k}\right)+\right.$$

$$\left.+\lambda_k\int_0^1 u(x,t)\left(\cos(\sqrt{\lambda_k}x)-\cos(\sqrt{\lambda_k})\right)dx\right]= \quad (3.9)$$

$$=-\lambda_k u_k(t) \ \ (k=1,2,...),$$

где $\alpha_k=1+b\cos^2\left(\sqrt{\lambda_k}\right)>1$.

Теперь, умножив обе части уравнения (1.1) на функцию $z_k(x)$ $(k=1,2,...)$, интегрируя полученное равенство по x от 0 до 1 и пользуясь соотношениями (3.8), (3.9) получаем, что удовлетворяется уравнение (3.2).

Аналогично, из (1.2) получаем, что выполняется условие (3.3).

Таким образом, $u_k(t)$ $(k=0,1,...)$ является решением задачи (3.2), (3.3). А отсюда непосредственно следует, что функции $u_k(t)$ $(k=0,1,...)$ удовлетворяют на $[0,T]$ системе (3.4). □

Очевидно, что если

$$u_k(t)=\int_0^1 u(x,t)z_k(x)dx \ \ (k=1,2,...)$$

является решением системы (3.4), то пара $\{u(x,t),a(t)\}$ функций $u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(t)y_k(x)$ и $a(t)$ является решением системы (3.5), (3.7).

Из леммы 3.1 следует, что имеет место следующее

Следствие. Пусть система (3.5), (3.7) имеет единственное решение. Тогда задача (1.1)–(1.4), (1.6) не может иметь более одного решения, т. е. если задача (1.1)–(1.4), (1.6) имеет решение, то оно единственно. Отсюда следует, что для доказательства единственности решения задачи (1.1)–(1.4), (1.6) достаточно доказать единственность решения системы (3.5), (3.7).

Рассмотрим в пространстве $E_T^{\frac{3}{2}}$ оператор

$$\Phi(u,a)=\{\Phi_1(u,a),\Phi_2(u,a)\},$$

где

$$\Phi_1(u,a)=\tilde{u}(x,t)\equiv\sum_{k=1}^{\infty}\tilde{u}_k(t)\sin\lambda_k x,$$

$$\Phi_2(u,a)=\tilde{a}(t),$$

а $\tilde{u}_k(t)\,(k=1,2,...)$ и $\tilde{a}(t)$ равны соответственно правым частям (3.4) и (3.7). Теперь с помощью нетрудных преобразований находим:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k\sqrt{\lambda_k}\|\tilde{u}_k(t)\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \le 2\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k\sqrt{\lambda_k}\,|\varphi_k|\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+2\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k\,|\psi_k|)^2\right)^{\frac{1}{2}} + 2\sqrt{T}\left(\int_0^T\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k\,|f_k(\tau)|\right)^2 d\tau\right)^{frac12} +$$

$$+2T\|a(t)\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k\sqrt{\lambda_k}\|u_k(t)\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.10)$$

$$\|\tilde{a}(t)\|_{C[0,T]} \le \|h^{-1}(t)\|_{C[0,T]}\Big\{\|h''(t)-f(0,t)\|_{C[0,T]} +$$

$$+\sqrt{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k\sqrt{\lambda_k}\,|\varphi_k|\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} +\right.$$

$$+\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k\,|\psi_k|\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{T}\left(\int_0^T\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k\,|f_k(\tau)|\right)^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$\left.\left.+T\|a(t)\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k\sqrt{\lambda_k}\|u_k(t)\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]\right\}. \quad (3.11)$$

Предположим, что данные задачи (1.1)–(1.4), (1.6) удовлетворяют следующим условиям:

1) $\varphi(x)\in W_2^{(3)}(0,1),\ b\varphi(1)+\int_0^1\varphi(x)dx=0,$

$\varphi'(0)=0,\ \varphi'(1)+b\varphi''(1)=0;$

2) $\psi(x)\in W_2^{(2)}(0,1),\ b\psi(1)+\int_0^1\psi(x)dx=0,$

$\psi'(0)=0;$

3) $f(x,t), f_x(x,t)\in C(D_T),\ f_{xx}(x,t)\in L_2(D_T),$

$bf(1,t)+\int_0^1 f(x,t)dx=0,$

$f_x(0,t)=0\ (0\le t\le T);$

4) $h(t)\in C^2[0,T],\ h(t)\ne 0\ (0\le t\le T).$

Тогда из (3.10) и (3.11), с учетом (2.14) и (2.16), соответственно, получаем:

$$\|\tilde{u}(x,t)\|_{B^{\frac{3}{2}}_{2,T}} \le$$
$$\le A_1(T)+B_1(T)\|a(t)\|_{C[0,T]}\|u(x,t)\|_{B^{\frac{3}{2}}_{2,T}}, \quad (3.12)$$

$$\|\tilde{a}(t)\|_{C[0,T]} \le$$
$$\le A_2(T)+B_2(T)\|a(t)\|_{C[0,T]}\|u(x,t)\|_{B^{\frac{3}{2}}_{2,T}}, \quad (3.13)$$

где

$$A_1(T)=2M\|\varphi'''(x)\|_{L_2(0,1)}+$$
$$+2\left(2m_0\psi'(1)+\sqrt{2}M\|\psi''(x)\|_{L_2(0,1)}\right)+$$
$$+2\sqrt{T}\left(2m_0\|f_x(1,t)\|_{C[0,T]}+\sqrt{2}M\|f_{xx}(x,t)\|_{L_2(D_T)}\right),$$
$$B_1(T)=2T,$$
$$A_2(T)=\|h^{-1}(t)\|_{C[0,T]}\Big\{\|h''(t)-f(0,t)\|_{C[0,T]}+$$
$$+\sqrt{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}\Big[M\|\varphi'''(x)\|_{L_2(0,1)}+2m_0\psi'(1)+$$
$$+\sqrt{2}M\|\psi''(x)\|_{L_2(0,1)}+$$
$$+\sqrt{T}\left(m_0\|f_x(1,t)\|_{C[0,T]}+\sqrt{2}M\|f_{xx}(x,t)\|_{L_2(D_T)}\right)\Big]\Big\},$$
$$B_2(T)=\|h^{-1}(t)\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}T.$$

Из неравенств (3.12), (3.13) заключаем:

$$\|\tilde{u}(x,t)\|_{B^{\frac{3}{2}}_{2,T}}+\|\tilde{a}(t)\|_{C[0,T]}\le$$
$$\le A(T)+B(T)\|a(t)\|_{C[0,T]}\|u(x,t)\|_{B^{\frac{3}{2}}_{2,T}}, \quad (3.14)$$

где

$$A(T)=A_1(T)+A_2(T),$$
$$B(T)=B_1(T)+B_2(T).$$

Итак, можно доказать следующую теорему:

***Теорема* 3.1.** *Пусть выполнены условия* 1)–4) *и*

$$\left(A(T)+2\right)^2 B(T)<1. \quad (3.15)$$

Тогда задача (1.1)–(1.4), (1.6) *имеет в шаре*

$$K=K_R\left(\|z\|_{E^{\frac{3}{2}}_T}\le R=A(T)+2\right)$$

пространства $E^{\frac{3}{2}}_T$ *единственное решение.*

Замечание. Неравенство (3.15) выполняется при достаточно малых значениях T.

Доказательство. В пространстве $E^{\frac{3}{2}}_T$ рассмотрим уравнение

$$z=\Phi z, \quad (3.16)$$

где $z=\{u,a\}$, компоненты $\Phi_i(u,a)\ (i=1,2)$ оператора $\Phi(u,a)$ определены правыми частями уравнений (3.5), (3.7) соответственно.

Рассмотрим оператор $\Phi(u,a)$ в шаре

$$K=K_R\left(\|z\|_{E^{\frac{3}{2}}_T}\le R=A(T)+2\right) \text{ из } E^{\frac{3}{2}}_T.$$

Аналогично (3.14) получаем, что для любых $z, z_1, z_2\in K_R$ справедливы оценки:

$$\|\Phi z\|_{E^{\frac{3}{2}}_T}\le A(T)+B(T)T\|a(t)\|_{C[0,T]}\|u(x,t)\|_{B^{\frac{3}{2}}_{2,T}}, \quad (3.17)$$

$$\|\Phi z_1-\Phi z_2\|_{E^{\frac{3}{2}}_T}\le$$
$$\le B(T)R\Big(\|a_1(t)-a_2(t)\|_{C[0,T]}+ \quad (3.18)$$
$$+\|u_1(x,t)-u_2(x,t)\|_{B^{\frac{3}{2}}_{2,T}}\Big).$$

Тогда из оценок (3.17) и (3.18), с учетом (3.15), следует, что оператор Φ действует в шаре $K=K_R$ и является сжимающим. Поэтому в шаре $K=K_R$ оператор Φ имеет единственную неподвижную точку $\{u,a\}$, которая является единственным решением уравнения (3.16), т. е. является единственным в шаре $K=K_R$ решением системы (3.5), (3.7).

Функция $u(x,t)$, как элемент пространства $B^{\frac{3}{2}}_{2,T}$, непрерывна и имеет непрерывные производные $u_x(x,t)$ и $u_{xx}(x,t)$ в D_T.

Из (3.2) нетрудно видеть, что

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sqrt{\lambda_k}\left\|u''_k(t)\right\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \sqrt{3}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{\left(m_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k\sqrt{\lambda}_k\left\|u_k(t)\right\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}+\right.$$

$$\left.+\left\|\left\|f_x(x,t)\right\|_{C[0,T]}\right\|_{L_2(0,1)}+\left\|a(t)\right\|_{C[0,T]}\left\|u(x,t)\right\|_{B_{2,T}^{\frac{3}{2}}}\right\}.$$

Отсюда следует, что $u_{tt}(x,t)$ непрерывна в D_T.

Легко проверить, что уравнение (1.1) и условия (1.2)–(1.4) и (1.6) удовлетворяются в обычном смысле.

Следовательно, $\{u(x,t), a(t)\}$ является решением задачи (1.1)–(1.4), (1.6). В силу следствия леммы 3.1 оно единственно в шаре $K = K_R$. □

С помощью леммы 1.1, из последней теоремы вытекает однозначная разрешимость исходной задачи (1.1)–(1.5).

***Теорема* 3.2.** *Пусть выполняются все условия теоремы* 3.1, *выполнены условия согласования*

$$\varphi(0) = h(0), \;\; \psi(0) = h'(T)$$

и

$$\frac{1}{2}\big(A(T)+2\big)T^2 < 1.$$

Тогда задача (1.1)–(1.5) *имеет в шаре*

$$K = K_R\left(\|z\|_{E_T^{\frac{3}{2}}} \le R = A(T)+2\right) \text{ из } E_T^{\frac{3}{2}}$$

единственное классическое решение.

Заключение

В работе доказано существование и единственность решения одной краевой задачи для эллиптического уравнения второго порядка с интегральным краевым условием второго рода.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гордезиани*, *Д.Г.* Решения нелокальных задач для одномерных колебаний среды / Д.Г. Гордезиани, Г.А. Авалишвили // Мат. моделирование. – 2000. – № 12 (1). – С. 94–103.

2. *Бицадзе*, *А.В.* О некоторых простейших обобщенных линейных эллиптических задач / А.В. Бицадзе, А.А. Самарский // ДАН СССР. – 1969. – № 85 (4). – С. 739–740.

3. *Гордезиани*, *Д.Г.* Об одном методе решения краевой задачи Бицадзе – Самарского / Д.Г. Гордезиани // Докл. семинара ИПМ Тбилисского государственного университета. – 1970. – № 2. – С. 38–40.

4. *Гордезиани*, *Д.Г.* О разрешимости одной краевой задачи для нелинейного уравнения эллиптического типа / Д.Г. Гордезиани, Д.З. Джуаев // Сообщения АН ГССР. – 1972. – № 68 (4). – С. 289–292.

5. *Соловьев*, *В.В.* Обратные задачи определения источника для уравнения Пуассона на плоскости / В.В. Соловьев // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 2004. – Т. 44, № 5. – С. 862–871.

6. *Соловьев*, *В.В.* Обратные задачи для эллиптических уравнений на плоскости / В.В. Соловьев // Дифференциальные уравнения. – 2006. – Т. 42, № 8. – С. 1106–1114.

7. *Мегралиев*, *Я.Т.* Обратная краевая задача для эллиптического уравнения второго порядка / Я.Т. Мегралиев // Вестник Бакинского Университета. Серия физико-математических наук. – 2011. – № 2. – С. 31–39.

8. *Мегралиев*, *Я.Т.* Обратная краевая задача для эллиптического уравнения второго порядка с дополнительным интегральным условием / Я.Т. Мегралиев // Вестник Удмуртского Университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. – 2012. – Вып. 1. – С. 32–40.

9. *Мегралиев*, *Я.Т.* О разрешимости одной обратной краевой задачи для эллиптического уравнения второго порядка / Я.Т. Мегралиев // Вестник Тверского государственного университета. Серия: Прикладная математика. – 2011. – № 23. – С. 25–38.

10. *Мегралиев*, *Я.Т.* Об одной обратной краевой задаче для эллиптического уравнения второго порядка с интегральным условием первого рода / Я.Т. Мегралиев // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2013. – Т. 44, № 1. – С. 226–235.

11. *Моисеев*, *Е.И.* Об особенностях корневого пространства одной спектральной задачи со спектральным параметром в граничном условии / Е.И. Моисеев, Н.Ю. Капустин // Докл. РАН. – 2002. – № 385 (1). – С. 20–24.

12. *Капустин*, *Н.Ю.* О сходимости спектральных разложений функций из класса Гельдера для двух задач со спектральным параметром в граничном условии / Н.Ю. Капустин, Е.И. Моисеев // Дифференциальные уравнения. – 2000. – № 36 (8). – С. 1069–1074.

Поступила в редакцию 09.02.17.